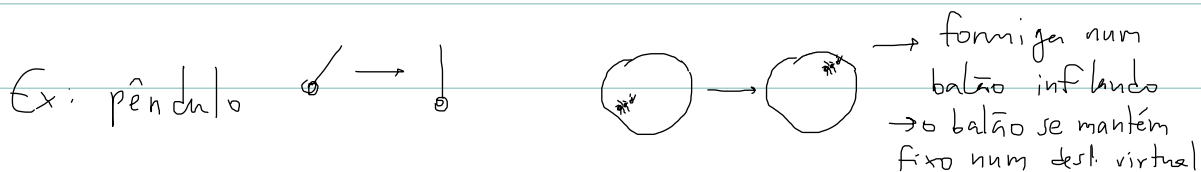


Aula 2 - Princípio de D'Alembert e eqs. de Lagrange (1.3, 1.4 até p.29)

Vimos que a mecânica Newtoniana usual não lida eficientemente com situações envolvendo vínculos. Seria desejável termos uma versão diferente da mecânica onde as eqs. de movimento:

- contenham apenas forças aplicadas (sem forças de vínculo)
- sejam escritas em termos de um n° mínimo de coords. ($n-p$)
- tenham a mesma forma em qq sistema de coords. generalizadas

Para ver como isso pode ser feito, vamos introduzir o conceito de "deslocamentos virtuais". Imagine um filme de ficção em que de repente o tempo é congelado para todos (menos o herói). Este pode então modificar à vontade a posição de objetos, sem derivá-los, (ie, sem afetar os vínculos que limitam os movimentos naquele instante t fixo, ou seja, os deslocamentos são entre configurações compatíveis com os vínculos em um dado t).



→ um deslocamento virtual é uma variação desse tipo, e que ainda ocorre entre configurações infinitesimalmente próximas notação: $q_i \rightarrow q_i + \delta q_i$

Ex: se $g(q_1, \dots, q_n, t) = 0$ é um vínculo holônomo do sistema
 então $0 = g(\vec{q} + \delta\vec{q}, t) = g(\vec{q}, t) + \vec{\nabla}_q g \cdot \delta\vec{q} \rightarrow \delta\vec{q}$ é tangente à superfície
 definida pelo vínculo no instante t

→ em situações onde os vínculos mudam com o tempo, um deslocamento virtual não
 coincide com os deslocamentos reais infinitesimais $d\vec{q}$, que satisfazem:

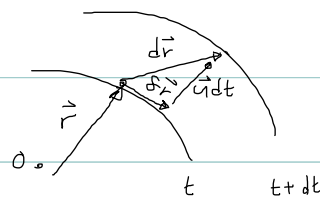
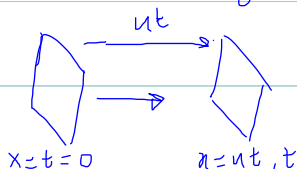
$$0 = g(\vec{q} + d\vec{q}, t + dt) = \vec{\nabla}_q g \cdot d\vec{q} + \frac{\partial g}{\partial t} dt$$

∴ Denotando $\Delta\vec{q} = d\vec{q} - \delta\vec{q}$, temos: $\Delta\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_q g = d\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_q g = -\frac{\partial g}{\partial t} dt$ *

ex! superfície se deslocando c/ vel $\vec{u} \Rightarrow g(\vec{r} - \vec{u}t) = 0$

p/ entender sinal: considere o exemplo

$g(\vec{r}) = x$; $\vec{u} = u\hat{n} \rightarrow g(\vec{r} - \vec{u}t) = x - ut$



$$\frac{\partial g}{\partial t} = \vec{\nabla}_q g \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = \vec{\nabla}_q g \cdot (-\vec{u})$$

→ $\Delta\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_q g = +u dt \cdot \vec{\nabla}_q g \rightarrow \Delta\vec{q}$ e $\vec{u} dt$ têm a mesma comp. perpendicular à sup.

(falta mostrar tb paralela...)

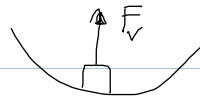
* entendendo o sinal: se ^{no instante t} g aumenta na direção de $\vec{u}$, então $\vec{\nabla}_q g \propto \vec{u}$

Assim, após o intervalo dt , quando a superfície tiver deslocado $\vec{u}dt$, o
 valor de g no ponto original* terá diminuído (portanto $\frac{\partial g}{\partial t} < 0$)

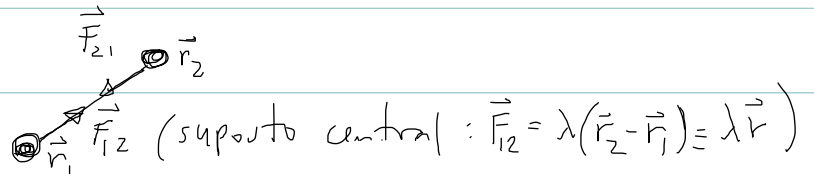
Princípio do Trabalho virtual

P: quanto trabalho é realizado pelas forças de vínculo f_i durante um deslocamento virtual?

ex 1: para um corpo restrito a deslizar sem atrito sobre uma superfície, $f_v \perp \text{sup.}$ ($f \propto \vec{\nabla} g$),
de modo que $\delta W_v = \vec{F}_v \cdot \delta \vec{r} = 0$



ex 2: forças num corpo rígido: p/ um par de partículas i, j mantidas à
distância fixa l :



vínculo: $g(r) \equiv r^2 - l^2 = 0 \rightarrow \vec{\nabla} g = 2\vec{r}$ (note que a "superfície" def. pelo
vínculo agora é uma esfera abstrata)

$\rightarrow$ num desloc. virtual compatível: $0 = \vec{\nabla} g \cdot \delta \vec{r} = \vec{r} \cdot \delta \vec{r}$

$$\Rightarrow \delta W' = \vec{F}_{12} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot \delta \vec{r}_2 = \vec{F}_{12} \cdot \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \lambda (\vec{r} \cdot \delta \vec{r}) = 0$$

obs: note que em um desloc. que envolve translação, tanto $\vec{F}_{12}$ como $\vec{F}_{21}$ realizam $\delta W' \neq 0$

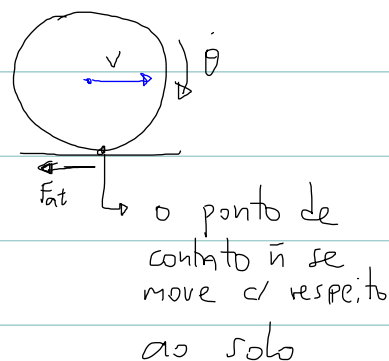
mas o $\delta W'$ total é nulo

extensão: p/ qq deslocamento virtual de um corpo rígido o trabalho
das forças responsáveis pelo vínculo de rigidez satisfaz $\delta W' = 0$

ex 3: corpo rolando sem deslizar

vínculo: $\dot{x} = R\dot{\theta} \Leftrightarrow x = R\theta + c$

Força resp: $\vec{F}_{at}$!



sem atrito: cilindro poderia girar c/ qq velocidade $\Rightarrow$ atrito é essencial p/ o vínculo

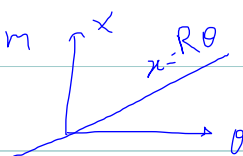


$\therefore$ num desloc. virtual (a t constante) $\delta W' = \vec{F}_{at} \cdot \delta \vec{r} = 0$,

pois $\delta \vec{r} = 0$ (mesmo que $\vec{F}_{at} \neq 0$)

Aqui " $\vec{r}$ " se refere ao ponto do corpo que está, instantaneamente, em contato com o solo.

coordenadas: x e θ , Vínculo: $x = R\theta + c \rightarrow$ podemos escolher as origens de modo que $c = 0$. O espaço de config. é assim representado pela reta $x = R\theta$ no plano (x, θ) e os desloc. virtuais satisfazem $\delta x = R\delta\theta$ tb.



Def: dizemos que um corpo está sujeito a **vínculos ideais** se as forças de vínculo realizam trabalho total $= 0$ nos deslocamentos virtuais

Q: todo vínculo holônomo é ideal? Sim, pois o sistema 'desliza sem atrito' sobre uma 'superfície' abstrata no espaço de config.

E vice-versa? NÃO (ex: disco rolando sem deslizar)

Ex de vínculo ñ ideal: forças de atrito de arrasto, reação de radiação E.M.

"Princípio dos trabalhos virtuais" ou "de d'Alembert"

Para um sistema mecânico sob vínculos ideais:

$$0 = \sum_i (\underbrace{\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{\text{tot}}}_{=0}) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i (\dot{\vec{p}}_i - (\vec{F}_i^{(a)} + \cancel{\vec{F}_i^{(c)}})) \cdot \delta \vec{r}_i$$

0 pela hip. de vínculos ideais

$$\rightarrow \boxed{\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0} \quad (*)$$

As eqs. de mov. podem ser deduzidas de (*)
ex: Máq de Atwood (v. texto)

Prós e contras:

- $\vec{n}$ aparecem forças de vínculo ✓
- mas ainda há coordenadas demais $\rightarrow$ os deslocamentos $\delta \vec{r}_i$
 $\vec{n}$ podem ser tomados como independentes X
- eqs ainda são vetoriais X

Para melhorar, reescrevemos em termos de coordenadas generalizadas independentes $q_1, \dots, q_n$

deslocamentos:
virtuais

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (\text{sem termo em } dt \text{ pois } t \text{ é fixo})$$

=> trab. virtual: $\delta W' = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_k Q_k \delta q_k$

obs: a partir daqui todas as forças nas eqs. são aplicadas ($\vec{F}_i^{(a)} \rightarrow \vec{F}_i$)

onde $Q_k = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ forças generalizadas (n. tem nec. dim. de F)

identidades úteis: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}$; $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ (pois $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$)

Substituindo no princ. de D'Alembert:

(onde passamos a tratar formalmente coordenadas e veloc. generalizadas como qtds independentes)

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(m \frac{d\vec{v}_i}{dt} - \vec{F}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(m \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \right] - Q_k \delta q_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(m \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right] - Q_k \delta q_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k \quad \text{onde } T = \sum_i \frac{1}{2} m \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \text{energ. cinética}$$

Como os δq_k 's são independentes:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

eqs de Lagrange generalizada